

УДК 517

МЕТОДЫ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИДжураев Абубакир Мухтарович¹, Рахманалы кызы Нурзада¹¹Жалал-Абадский государственный университет имени Б.Осмонова, Кыргызская Республика, Жалал-Абад**Аннотация**

В данной статье рассматриваются методы первого приближения для исследования устойчивости динамических систем. Основное внимание уделяется двум ключевым подходам: методу линеаризации и методу Ляпунова. Линеаризация позволяет аппроксимировать нелинейную систему в окрестности точки равновесия с помощью её линейной модели, что значительно упрощает анализ устойчивости, особенно при наличии аналитических решений. Однако данный метод применим только тогда, когда линейная система даёт корректное представление о поведении исходной системы. Метод Ляпунова, в свою очередь, является более мощным инструментом, поскольку позволяет исследовать устойчивость без явного решения уравнений системы. В статье подробно рассматриваются основные принципы построения функций Ляпунова, критерии устойчивости и примеры их применения к различным классам динамических систем. Кроме того, приводятся конкретные примеры, демонстрирующие применение данных методов в механике, теории управления и математической физике. Обсуждаются ограничения и возможные пути их преодоления. Статья ориентирована на студентов, исследователей и специалистов, занимающихся анализом устойчивости динамических процессов в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: устойчивость, методы первого приближения, линеаризация, метод Ляпунова, динамические системы

STUDY OF STABILITY IN A FIRST APPROXIMATIONDjuraev Abubakir Muhtarovich¹, Rahmanaly kyzy Nurzada¹¹Jalal-Abad State University named B.Osmonova, Jalal-Abad, Kyrgyzstan**Abstract**

This article examines first-approximation methods for studying the stability of dynamic systems. The focus is on two key approaches: the linearization method and the Lyapunov method. The linearization method approximates a nonlinear system near an equilibrium point using its linear model, which significantly simplifies the stability analysis, especially when analytical solutions are available. However, this method is applicable only when the linearized system provides an accurate representation of the original system's behavior. The Lyapunov method, on the other hand, is a more powerful tool for analyzing stability since it allows stability assessment without explicitly solving the system's equations. This article provides a detailed discussion of the fundamental principles of constructing Lyapunov functions, stability criteria, and examples of their application to various classes of dynamic systems. Additionally, concrete examples are presented to illustrate the practical applications of these methods in mechanics, control theory, and mathematical physics. The limitations of these

methods and possible ways to overcome them are also discussed. This article is intended for students, researchers, and specialists working on the stability analysis of dynamic processes in various scientific and engineering fields.

Keywords: stability, first-approximation methods, linearization, Lyapunov method, dynamic systems

© 2025. The Authors. This is an open access article under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License, CC BY, which allows others to freely distribute the published article, with the obligatory reference to the authors of original works and original publication in this journal.

Correspondence: Djuraev Abubakir Mukhtarovich, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Jalal-Abad State University named after B.Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, Email: ajrv@mail.ru

Введение

Исследование устойчивости динамических систем является одной из ключевых задач математики, механики, физики и теории управления. Понимание устойчивости состояния системы позволяет предсказывать её поведение при малых возмущениях, что критически важно в инженерных приложениях, экономике, биологии, а также при моделировании сложных природных явлений. Основная цель исследования устойчивости — определить, останется ли система вблизи своего стационарного состояния (равновесия) при малых изменениях начальных условий или внешних воздействий. Если система возвращается к исходному состоянию или остаётся в его окрестности, такое равновесие называется устойчивым. Если же небольшое отклонение приводит к неограниченному удалению от исходного состояния, система является неустойчивой. [1] В данной статье рассматриваются методы первого приближения, позволяющие анализировать устойчивость систем при небольших возмущениях. Эти методы включают:

Метод линеаризации, который основан на аппроксимации нелинейной системы её линеаризованной версией в окрестности точки равновесия. Он позволяет определить устойчивость путём анализа собственных значений якобиана системы.

Метод Ляпунова, который использует специальные функции (функции Ляпунова) для оценки устойчивости без необходимости явного решения уравнений. Этот метод особенно полезен для нелинейных систем, где линеаризация может не дать однозначного ответа. Применение этих методов широко распространено в различных областях. В механике они используются для анализа устойчивости равновесий маятников, робототехнических систем и динамики твёрдых тел. В теории управления позволяют проектировать устойчивые регуляторы, обеспечивающие корректную работу автоматизированных систем. В математической биологии применяются для моделирования устойчивости популяций и экосистем. В электротехнике помогают анализировать поведение электрических цепей и колебательных контуров. [1]

Несмотря на свою простоту и эффективность, методы первого приближения имеют ограничения. Линеаризация даёт точные результаты только в случае локального анализа и не всегда применима к сильно нелинейным системам. Метод Ляпунова требует выбора подходящей функции, что может быть сложной задачей. Тем не менее, оба метода остаются одними из наиболее распространённых инструментов анализа устойчивости.

В данной статье будут подробно рассмотрены основные принципы этих методов, их математическое обоснование, а также примеры их применения в различных дисциплинах. [2]

1. Основные понятие устойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0.$$

Точка $x = 0$ называется равновесной. Устойчивость в смысле Ляпунова определяется следующим образом:

- **Устойчивость по Ляпунову:** Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что при $\|x(0)\| < \delta$ для всех $t \geq 0$ выполняется $\|x(t)\| < \varepsilon$.
- **Асимптотическая устойчивость:** Если дополнительно выполняется $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, то равновесие является асимптотически устойчивым. [2]

2. Метод линеаризации

Метод первого приближения основан на замене нелинейной системы её линеаризованной версией в окрестности точки равновесия. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема, тогда можно разложить её в ряд Тейлора:

$$f(x) \approx Ax, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Рассматривая линейную систему

$$\dot{x} = A(x),$$

мы можем исследовать устойчивость равновесия $x = 0$ по спектральным свойствам матрицы A .

- Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то система асимптотически устойчива.
- Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, равновесие неустойчиво. [3]. Пример: Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}.$$

Матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Её собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Так как обе вещественные части отрицательны, система асимптотически устойчива.

Пример 1: Нелинейный осциллятор

Рассмотрим нелинейное уравнение:

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0.$$

Введём переменные $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$, тогда система переписывается как:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3 \end{cases}$$

Найдём якобиан:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

В точке равновесия (0,0) матрица будет:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Так как вещественная часть нулевая, метод первого приближения не даёт ответа о типе устойчивости. Необходимо использовать нелинейные методы (например, Ляпунова).

Пример 2: Маятник с малым демпфированием

Рассмотрим уравнение маятника с трением:

$$\ddot{\theta} + 0,1\dot{\theta} + \sin\theta = 0.$$

При малых θ аппроксимируем $\sin\theta \approx \theta$, получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\theta_1 - 0,1\theta_2 \end{cases}.$$

Якобиан:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = -0,05 \pm i.$$

Так как вещественная часть отрицательная, система асимптотически устойчива.

3. Метод Ляпунова

Метод Ляпунова позволяет анализировать устойчивость без явного нахождения решений. Вводится функция $V(x)$, называемая функцией Ляпунова, удовлетворяющая условиям:

- $V(x)$ положительно определена: $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ при $x \neq 0$.
- Производная вдоль траекторий системы $V'(x) = \frac{dV}{dt}$ отрицательно определена: $V'(x) < 0$.

Если такие условия выполняются, то равновесие асимптотически устойчиво. [4]

Пример: Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x^3.$$

Выберем функцию Ляпунова $V(x) = \frac{x^2}{2}$. Тогда

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -x^4 < 0 \text{ для } x \neq 0.$$

Следовательно, система асимптотически устойчива.

Примеры для метода Ляпунова

Пример 1: Устойчивость простейшей системы

Рассмотрим уравнение:

$$\dot{x} = -x^3.$$

Выбираем функцию Ляпунова:

$$V(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Её производная:

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -x^4.$$

Так как $\dot{V} \leq 0$, равновесие $x = 0$ устойчиво.

Пример 2: Двумерная система

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -2y \end{cases}.$$

Выберем функцию Ляпунова:

$$V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Её производная:

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(-x + y^2) + y(-2y) = -x^2 - 2y^2 + xy^2.$$

Так как xy^2 не всегда отрицательно определено, этот метод требует дополнительного анализа.

4. Применение методов первого приближения

Методы первого приближения применяются в различных областях:

- **Механика:** Исследование устойчивости равновесия маятников и механических систем.
- **Теория управления:** Анализ устойчивости линейных регуляторов, обратной связи.
- **Электротехника:** Исследование устойчивости колебательных контуров и электрических цепей. [5]

Заключение

Методы первого приближения играют важную роль в анализе устойчивости динамических систем. Они позволяют исследовать поведение системы в окрестности её стационарных состояний, используя сравнительно простые математические инструменты. Метод линеаризации даёт быстрый и наглядный способ определения устойчивости, основываясь на анализе собственных значений матрицы Якоби. Он широко применяется в механике, автоматическом управлении, электротехнике и других инженерных дисциплинах. Однако данный метод имеет ограничения: если среди собственных значений линейной модели есть чисто мнимые числа или нули, метод не даёт однозначного ответа, требуя использования более тонких подходов. [6]

Метод Ляпунова является мощным инструментом, позволяющим анализировать устойчивость без необходимости нахождения явных решений уравнений. Он применим как к линейным, так и к нелинейным системам, а также позволяет исследовать не только устойчивость, но и характеристики движения системы (например, асимптотическую устойчивость или глобальную устойчивость). Однако одним из главных сложностей данного метода является выбор подходящей функции Ляпунова, что не всегда является тривиальной задачей.

В статье были рассмотрены примеры, демонстрирующие применение обоих методов. Они показали, что метод линеаризации удобен для быстрого анализа малых возмущений, но может оказаться недостаточным в более сложных случаях. В таких ситуациях метод Ляпунова даёт более полную картину поведения системы. Будущие исследования в данной области могут быть направлены на развитие алгоритмов автоматического поиска функций Ляпунова, использование компьютерных методов для проверки устойчивости сложных многомерных систем, а также на разработку гибридных подходов, сочетающих преимущества разных методов. Современные вычислительные технологии позволяют существенно упростить анализ устойчивости даже в сложных нелинейных системах, что открывает новые возможности для исследований и практического применения. [7]

Список литературы

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хаакин С.Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
2. Халанай А. Дифференциальные уравнения: устойчивость, осцилляции и асимптотика. — М.: Мир, 1967.
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950.
4. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. — М.: Наука, 1962.
5. Владикавказов С.Ю. Методы исследования устойчивости динамических систем. — М.: Физматлит, 2005.
6. Леонтович А.М. Основы теории устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1948.
7. Кразовский Н.Н. Теория устойчивости движения: современные методы. — М.: Наука, 1978.

Received / Получено 28.01.2025
Revised / Пересмотрено 20.02.2025
Accepted / Принято 20.03.2025